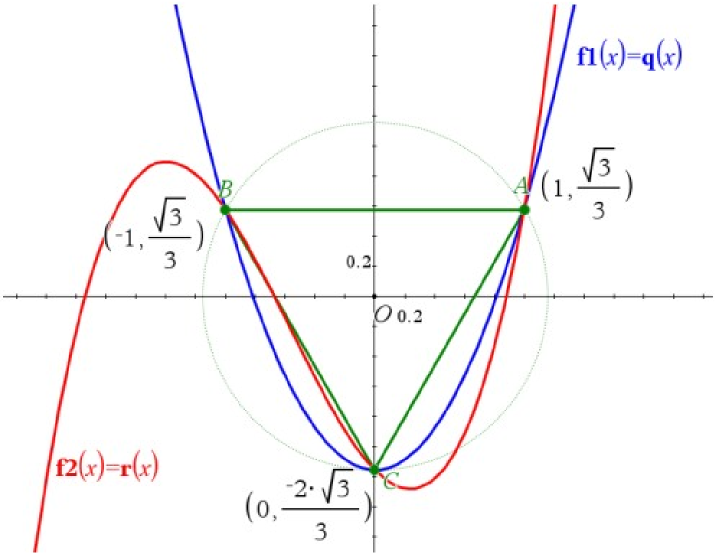
Partie A : Triangles équilatéraux

1. La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine) est une droite. Les sommets distincts d'un triangle équilatéral étant au nombre de 3 et cocycliques, ils ne peuvent tous trois être à la fois sur le cercle et sur la droite (lesquels n'ont que 2 points d'intersection).

2.a, b et c en image avec TI-Nspire CAS.

ABC apparaît comme un triangle équilatéral direct de côté 2.

Les représentations graphiques des fonctions *Q* et *R* passent par les sommets du triangle.



2.d. Les questions **2.b** et **2.c** montrent respectivement qu'il existe un polynôme de degré 2 et un polynôme de degré 3 dont les représentations passent par *A, B* et *C*.

Define $q(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(3\cdot x^2-2\right)$	*Terminé*
Define $r(x)=q(x)+x\cdot\left(x^2-1\right)$	*Terminé*
$\{q(-1),q(0),q(1)\}$	$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$
$\{r(-1),r(0),r(1)\}$	$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Pour $d \geq 4$ posons : $R_d(x) = Q(x) + x^{d-2}(x^2-1)$

Il s'agit, par construction, du polynôme $Q(x)$ augmenté d'un polynôme de degré *d* qui s'annule en $-1; 0 ; 1$. Sa représentation graphique passe par *A, B* et *C*.

3.a. La rotation *r* de centre *O* et d'angle droit direct, $M(x\,;y) \longmapsto r(M) = M'(x'\,;y')$ est définie analytiquement par les formules : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

Si *A* est un point distinct de *O* de coordonnées $(u\,;v)$, alors les points *B, C, D* sont les points :

$$B(-v, u)\,;C(-u\,;\,-v)\,;D(v\,;\,-u)$$

Montrons que les quatre abscisses sont distinctes et non nulles :

On sait que la courbe représentative d'une fonction, ne peut pas passer par deux points distincts de même abscisse (par une fonction, tout réel de son ensemble de définition a une image et une seule).

Cette propriété s'applique au cas d'une fonction polynôme dont la courbe représentative passe par les quatre points *A, B, C, D* et justifie que ces points ont nécessairement des abscisses distinctes.

u ; $-v$; $-u$; v sont deux à deux distincts.

En conséquence, $u \neq -u$, donc $u \neq 0$ et $v \neq -v$, donc $v \neq 0$: les quatre abscisses sont toutes non nulles.

3.b. Vu la disposition relative des sommets d'un carré dans le plan, une fonction continue doit changer au moins deux fois de sens de variation pour que sa courbe représentative puisse passer par les quatre sommets. Dans le cas d'une fonction polynôme *P*, cette fonction ne peut être ni constante (ce qui élimine le cas du polynôme nul), ni affine, ni de degré 2 (qui ne change qu'une fois de sens de variation).

Une fonction polynôme *P* dont la courbe représentative C_P passe par les quatre sommets du carré *ABCD* est au moins de degré 3.

4. Soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme dont la courbe représentative C_P passe par les quatre points *A, B, C, D*. Les coefficients *a, b, c* sont solution du système :

$$\begin{cases} P(u) = u^3 + au^2 + bu + c = v \\ P(-v) = -v^3 + av^2 - bv + c = u \\ P(-u) = -u^3 + au^2 - bu + c = -v \\ P(v) = v^3 + av^2 + bv + c = -u \end{cases}.$$

4.a. En ajoutant membre à membre les équations (1) et (3), ainsi que (2) et (4), nous obtenons : $\begin{cases} 2au^2 + c = 0 \\ 2av^2 + c = 0 \end{cases}$.

Vu que les nombres *u* et *v* ne sont ni nuls ni opposés, leurs carrés sont distincts. Le système $\begin{cases} 2au^2 + c = 0 \\ 2av^2 + c = 0 \end{cases}$ a donc pour solution la solution nulle $a = c = 0$.

Il en résulte que le polynôme *P* est un polynôme impair de la forme $P(x) = x^3 + bx$

4.b. Le système initial se résume désormais au système de deux équations : $\begin{cases} P(u) = u^3 + bu = v \\ P(v) = v^3 + bv = -u \end{cases}$

En combinant les deux équations, nous obtenons aussi bien :

$P\big(P(u)\big) = -u$ que $P(u) = -P(-u) = -P\big(P(v)\big) = v$.

Les deux nombres réels *u* et *v* sont des solutions de l'équation : $P\big(P(x)\big) = -x$ soit de $P\big(P(x)\big) + x = 0$.

Le polynôme *P* étant impair, son composé par lui-même $P \circ P$ est aussi impair, et les opposés $-u$ et $-v$ vérifient eux aussi la même équation.

Le calcul montre que l'équation en question est l'équation :

$x(x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2+1)x^2 + b^2 + 1) = 0$

Puisque *u* et *v* sont non nuls, l'équation efficiente est : $x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2+1)x^2 + b^2 + 1 = 0$

Notons $R(x) = x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2+1)x^2 + b^2 + 1$.

4.c. Soit le polynôme : $Q(x) = x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2+1)x + b^2 + 1$.

En comparant avec l'équation de la question précédente, nous constatons que : $Q(x) = R\big(\sqrt{x}\big)$. Considérons les quatre solutions de l'équation précédente avec les mêmes notations *u* et *v*.

Nous obtenons : $Q(u^2) = R(u) = 0$ et de même $Q(v^2) = R(v) = 0$.

Puisque *u* et *v* sont ni égaux ni opposés, leurs carrés sont distincts.

Le polynôme *Q* admet au moins deux racines distinctes strictement positives, les carrés des solutions de l'équation du **4.b**.

4.d. Si $b \geq 0$, alors pour tout $x \geq 0$, $Q(x) = x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2+1)x + b^2 + 1$ est une somme de termes tous positifs dont au moins un l'est strictement : $b \geq 0 \implies Q(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x \geq 0$.

Or, la question **4.c** montre qu'il existe deux réels strictement positifs pour lesquels $Q(x) = 0$. Par contraposition, cette existence de tels réels montre que $b < 0$.

4.e. En développant l'expression fournie par l'énoncé :

$$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 + (\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + \alpha^2\beta^2$$

Identifions les coefficients obtenus avec ceux de l'expression de la question **4.c** :

$$\begin{cases} 3b = -2(\alpha+\beta) \\ 3b^2 = \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta \\ b(b^2+1) = -2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ b^2+1 = \alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire, en combinant (1) et (3) : $b^2+1 = -3\alpha\beta$ puis : $(b^2+1)^2 = 9\alpha^2\beta^2 = 9(b^2+1)$.

Le nombre *b* vérifie : $b^2+1 = 9$, soit $b^2 = 8$.

Vu que *b* est strictement négatif, nous trouvons bien $b = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$, conformément à l'énoncé.

Déterminons α et β :

Il s'agit de deux réels strictement positifs tels que : $\begin{cases} -2(\alpha+\beta) = 3b = -6\sqrt{2} \\ \alpha^2\beta^2 = b^2+1 = 9 \end{cases}$ soit tels que $\begin{cases} \alpha+\beta = 3\sqrt{2} \\ \alpha\beta = 3 \end{cases}$

Ces deux nombres sont les solutions de l'équation au second degré $X^2 - 3X\sqrt{2} + 3 = 0$. Nous obtenons :

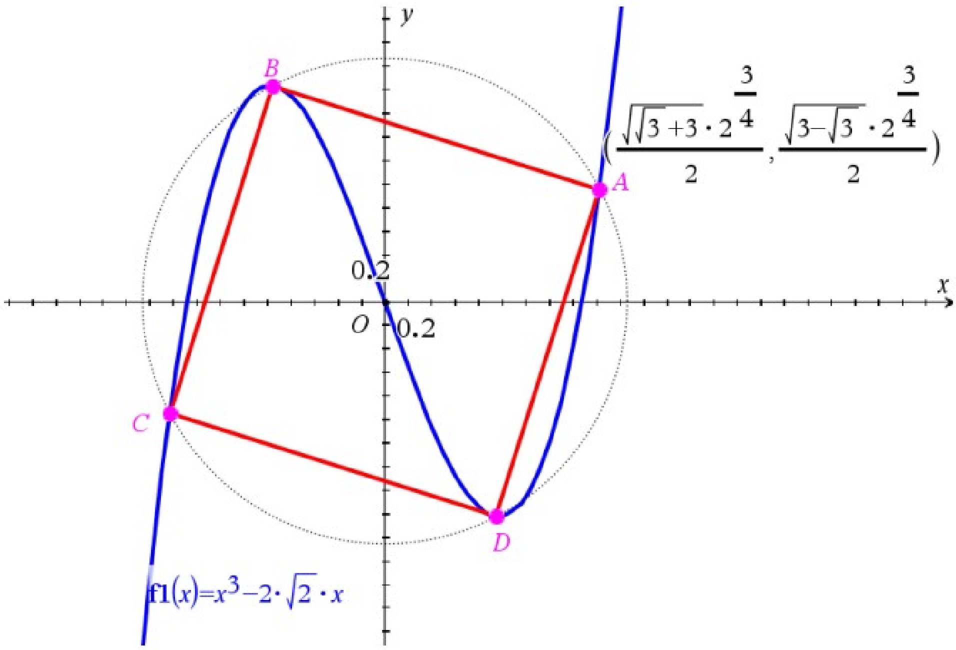
$$\alpha = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2} \ ; \ \beta = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$$

D'après la question **4.c**, les racines de *Q* sont les carrés des nombres *u* et *v* définis à la question **3**, qui sont les coordonnées d'un sommet du carré.

Nous en déduisons :

$$u = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}} \ ; \ v = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}}$$

Nous obtenons en fin de compte la figure ci-contre



Partie C : Où l'on prouve que $d \geq k-1$

6. Considérons un polygone régulier $M_1M_2 \dots M_k$ à k sommets, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. notons x_j l'abscisse du point M_j et φ_j la mesure de de l'angle $(\vec{\imath}, \widehat{\overrightarrow{OM_j}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$.

La relation entre ces mesures et les coordonnées des M_j est que : $x_j = R\cos(\varphi_j)\ ;\ y_j = R\sin(\varphi_j)$.

Le polygone étant régulier de sens direct, les angles $(\widehat{\overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_{j+1}}})$ sont égaux et ont pour mesure commune $\frac{2\pi}{k}$, de sorte que pour tout indice j tel que $1 \leq j \leq k$, la mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \widehat{\overrightarrow{OM_j}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$ est le nombre réel $\varphi_1 + \frac{2\pi\times(j-1)}{k}$.

Dans chaque intervalle $\left[-\pi + \frac{2\pi\times(j-1)}{k}\ ; -\pi + \frac{2\pi\times j}{k}\right[$, il y a une telle mesure.

6.a. L'ensemble $\{x_1\ ; \dots ;\ x_k\}$ étant un ensemble fini, il possède un plus petit élément. On peut permuter circulairement l'indexation de façon à ce que x_1 soit ce plus petit élément.

De plus, s'il existe un polynôme P dont la courbe représentative passe par les sommets de ce polygone, alors la courbe représentant le polynôme $-P$ passe par les sommets de son polygone symétrique par rapport à l'axe Ox. L'un des deux points symétriques d'abscisse x_1 a une ordonnée négative. On peut choisir pour notre « supposition » celui des deux polygones qui a cette propriété.

6.b. Pour tout réel *x* appartenant à l'ensemble de définition d'une fonction *f*, quelle qu'elle soit, nous savons qu'il y a un et un seul point d'abscisse *x* qui appartient à la courbe représentative de cette fonction puisque *x* a une seule image par *f*.

Donc, si la courbe représentative d'un polynôme *P* passe par les sommets du polygone $M_1M_2 \ldots M_k$, alors ces points ont des abscisses deux à deux distinctes.

Supposons qu'il existe *i* tel que $y_i = 0$. Alors, l'axe *Ox* serait un axe de symétrie du polygone puisque cet axe passe par le centre du polygone et un sommet. Les sommets non placés sur *Ox* seraient alors deux à deux symétriques par rapport à *Ox* et auraient la même abscisse, ce qui contredirait le début de cette question.

Nécessairement, tous les sommets ont des ordonnées non nulles.

6.c et d. Soit φ_1 la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_1}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$. Le polygone étant régulier de sens direct, les angles $(\widehat{\overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_{j+1}}})$ sont égaux et ont pour mesure commune $\frac{2\pi}{k}$, de sorte que pour tout indice *j* tel que $1 \leq j \leq k$, la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_j}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$ est le nombre réel $\varphi_1 + \frac{2\pi\times(j-1)}{k}$.

La fonction cosinus étant une fonction croissante sur $[-\pi\ ; 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$, les abscisses x_j sont rangées dans l'ordre des mesures d'angles φ_j qui sont négatives (correspondant aux sommets d'ordonnées négatives) et dans l'ordre inverse de celles qui sont positives (correspondant aux sommets d'ordonnées positives). Les plus petites abscisses sont celles associées d'une part à $\varphi_1 \in \left[-\pi\ ; -\pi + \frac{2\pi}{k}\right]$ et d'autre part à $\varphi_k = \varphi_1 + \frac{2\pi(k-1)}{k} = 2\pi + \varphi_1 - \frac{2\pi}{k} \in \left[\pi - \frac{2\pi}{k}\ ;\ \pi\right]$. Posons $\theta = \varphi_1 - \pi$.

On sait déjà par construction que $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{2\pi}{k}\right]$

- D'une part : $x_1 = R\cos(\varphi_1) = R\cos(\pi + \theta) = -R\cos(\theta)$ et $y_1 = -R\sin(\pi + \theta) = -R\sin(\theta)$
- D'autre part $x_k = R\cos(\varphi_k) = R\cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi}{k}\right) = -R\cos\left(\frac{2\pi}{k} - \theta\right)$

Pour que x_1 soit le plus petit des deux nombres, il faut que $\cos(\theta) > \cos\left(\frac{2\pi}{k} - \theta\right)$ et pour cela que $\frac{2\pi}{k} - \theta > \theta$

Ainsi, $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{k}\right]$ (la « première moitié » de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{2\pi}{k}\right]$).

De plus, la condition $y_1 \neq 0$ élimine la valeur 0.

En fin de compte, $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{k}\right]$ et $x_1 = R\cos(\varphi_1)\,;\; y_1 = R\sin(\varphi_1)$.

Par ajouts successifs de $\frac{2\pi}{k}$ à φ_1 et retraits successifs de $\frac{2\pi}{k}$ à φ_k, on obtient, tant qu'il n'y a pas de changement de signe (ce qui se produit à mi-parcours), les rangements $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots$ et $\varphi_k > \varphi_{k-1} > \cdots$, avec un rangement de leurs cosinus : $\cos(\varphi_1) < \cos(\varphi_k) < \cos(\varphi_2) < \cos(\varphi_{k-1}) < \cdots$.

Il en résulte le rangement : $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < \cdots$

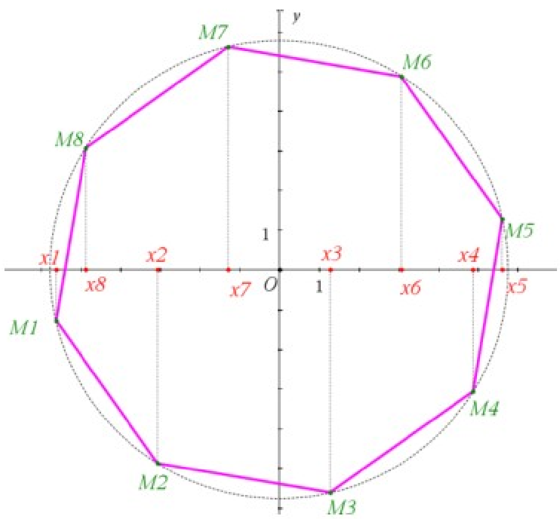
6.e. Les sommets d'abscisses $x_1,\ x_k,\ x_2,\ x_{k-1}$, ... ont, alternativement, des ordonnées négative puis positive, puis négative, ... Si la courbe représentative d'un polynôme *P* passe par tous les sommets, ce polynôme vérifie : $P(x_1) < 0\,; P(x_k) > 0\,;\; P(x_2) < 0\,; P(x_{k-1}) > 0\,;$ ...

Sur chacun des $(k-1)$ segments $[x_1\,;\,x_k]\,;\,[x_k\,;\,x_2]\,;\,[x_2\,;\,x_{k-1}]$ ..., la fonction polynôme *P* est une fonction continue qui change strictement de signe. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, *P* prend au moins une fois la valeur 0 sur chacun d'entre eux. Ce polynôme *P* admet au moins $(k-1)$ racines.

6.f. On sait qu'un polynôme de degré *d* admet au plus *d* racines.

Pour que le polynôme *P* admette au moins $(n-1)$ racines, il faut que son degré soit au moins égal à ce nombre de racines : $d \geq n-1$.

Exemple de rangement des abscisses x_k lorsque *k* est un nombre pair ($k = 8$).



Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geq k - 1$ convient

7.a. Le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est l'image du repère $\Re$ par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure *a*. Il est donc orthonormé.

Notons que la matrice de passage des « anciennes » coordonnées aux « nouvelles » est la matrice $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$

7.b. Le point *B* est l'image du point de coordonnées $(1\ ;0)$ par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure $a + b$. Il se déduit du point *A* par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure *a*. Ses coordonnées dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ sont donc $(\cos(b)\ ; \sin(b))$.

7.c. On sait que, dans un changement de repère, la matrice-colonne des « anciennes » coordonnées s'exprime en fonction de la matrice-colonne des « nouvelles » coordonnées par l'action de la matrice de passage :

En l'occurrence :

$$\begin{pmatrix} \cos(a+b) \\ \sin(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, par identification, la première formule de l'énoncé.

La deuxième formule s'en déduit en changeant *b* en $-b$.

Notons que des deux formules de l'énoncé, nous pouvons en déduire une troisième qui nous servira dans la question suivante : $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a) . \cos(b)$

8.a. Soit $\wp_n$ la propriété, liée à l'entier *n* : « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ». Démontrons cette propriété par une récurrence portant sur deux rangs consécutifs.

Initialisation : $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$. La propriété $\wp_n$ est vérifiée aux rangs 0 et 1.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, les propriétés $\wp_n$ et $\wp_{n+1}$ soient vérifiées. C'est-à-dire supposons que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et que $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n + 1)\theta)$.

Au rang suivant : $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) \times\ T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$.

Appliquons l'hypothèse de récurrence : $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) \times \left(\cos\big((n+1)\theta\big)\right) - \cos(n\theta)$.

Appliquons la « troisième formule » de la question précédente :

$2\cos(\theta) \times \left(\cos\big((n+1)\theta\big)\right) - \cos(n\theta) = \left(\cos\big((n+1)\theta + \theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big)\right) - \cos(n\theta)$.

Soit : $T_{n+2}(\theta) = 2\cos(\theta) \times \left(\cos\big((n+1)\theta\big)\right) - \cos(n\theta) = \cos\left((n+2)\theta\right)$. Ce qui démontre l'hérédité.

$$(\wp_n \text{ et } \wp_{n+1}) \implies \wp_{n+2}$$

La propriété $\wp_n$: « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ » est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

8.b. Considérons l'expression $T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\times\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$ et

Appliquons à $T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right)$la propriété démontrée dans la question précédente :

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos\left((\ell-1)\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos\left(\ell\theta - \theta + 2j\pi - \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \cos\left(\ell\theta - \left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right)$$

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos\left(\ell\theta - \left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos(\ell\theta)\times\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) + \sin(\ell\theta)\times\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$$

Nous obtenons :

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\times\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\times\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$$

8.c. Appliquons la relation précédente avec les données de la question **C.6** lorsque $\ell = d$.

Dans un tel cas : $R\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = -x_j$ et $R\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = -y_j$

$$T_{d-1}\left(\frac{-x_j}{R}\right) + \cos(d\theta)\times\frac{x_j}{R} = -\sin(d\theta)\times\frac{y_j}{R}$$

Nous obtenons :

$$-\frac{R}{\sin(d\theta)}T_{d-1}\left(\frac{-x_j}{R}\right) - \frac{\cos(d\theta)}{\sin(d\theta)}\times x_j = y_j$$

Nous pouvons proposer comme fonction polynôme de degré $d-1$ dont la courbe contient les sommets du polygone régulier la fonction polynôme :

$$P(x) = -\frac{R}{\sin(d\theta)}T_{d-1}\left(-\frac{x}{R}\right) - \frac{\cos(d\theta)}{\sin(d\theta)}\times x$$

Où *R* représente le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à *d* sommets et où θa été défini par l'énoncé.

En lui ajoutant un polynôme de la forme $Q(x) \times \prod_{j=1}^{d}(x - x_j)$, nous ne changeons pas les valeurs prises par ce polynôme aux points x_j.

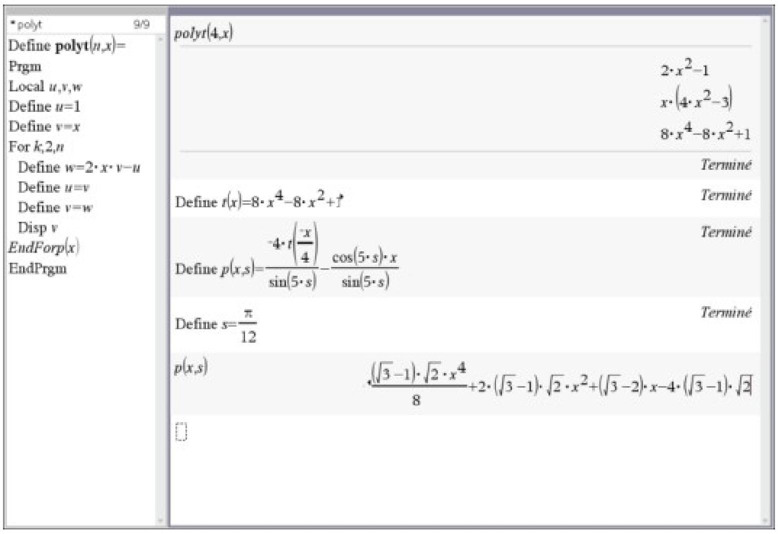
Tout polynôme de la forme suivante (dont le degré est $\geq d$) convient, Q étant un polynôme arbitraire :

$$x \longmapsto P(x) + Q(x) \times \prod_{j=1}^{k} (x - x_j)$$

Etude d'un exemple : cas d'un pentagone avec $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{12}}$

Nous avons commencé par définir les polynômes T_k jusqu'au quatrième.

Nous considérons le pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 4 et tel que $\varphi_1 = -\pi + \frac{\pi}{12}$, soit tel que $\theta = \frac{\pi}{12}$ (variable s ci-contre).



Le logiciel TI-Nspire CAS affiche sur la copie d'écran précédente le polynôme P du quatrième degré correspondant.

Représentation graphique ci-contre.